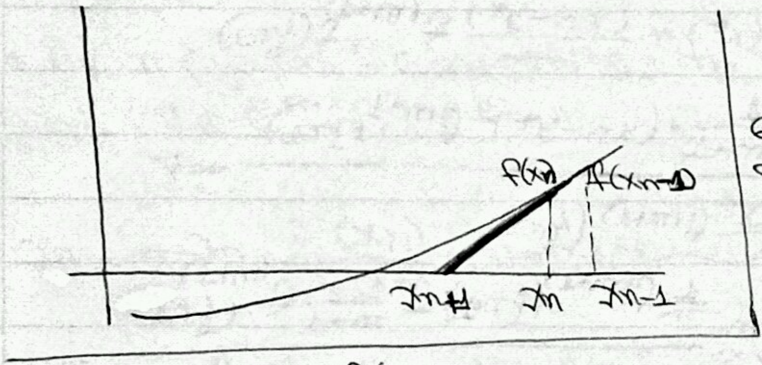
29-10-14.

Μέθοδος της Τέμνουσας.

Είναι παραλλαγή της μεθ. Νεύτωνα.



Στη θέση της $f'(x_n)$ χρησιμοποιείται η διαιρημένη διαφορά $\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}} \quad , n=1,2,\ldots$$

x_0, x_1 αρχικές προσεγγίσεις!

<u>Θεώρημα.</u> Έστω x^* ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και (a,b) περιέχει τη x^* τέτοιο ώστε $f\in C^2(a,b)$, $f'(x^*)\neq 0$ και $f''(x^*)\neq 0$. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I που περιέχει το x^*, τέτοιο ώστε η ακολουθία (x_n) που παράγεται από τη μέθοδο τέμνουσας, είναι καλώς ορισμένη στο I και συγκλίνει στο x^* με τάξη σύγκλισης $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1.62$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^{\beta}} = \alpha \neq 0.$$

Γραμμικά συστήματα

Έστω το γραμμικό σύστημα $Ax=b$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $x,b\in\mathbb{R}^n$.

Στόχος της Α.Α είναι να επινοήσει μεθόδους που θα λύνουν με ταχύτητα και με ευστάθεια τα γραμμικά συστήματα.

α) Μέθοδος Cramer

β) Εύρεση του A^{-1} και τότε $x=A^{-1}\cdot b$

α) Cramer

Απαιτεί υπολογισμό $n+1$ οριζουσών με $n!\cdot(n-1)$ πολλαπλασιασμούς. Τεράστιος αριθμός.

β) Απαιτεί λύση n γραμμ. συστημάτων

$AX=I$ τότε $X=A^{-1}$

$AX^{(i)}=e^{(i)}$ $\quad i=1,2,\dots n.$

Μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Στόχος της μεθόδου είναι η μετατροπή του γρ. συστήματος $Ax=b$ σε ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό σύστημα $Ux=y$.

$$u_{11}x_1+u_{12}x_2+\dots+u_{1n}x_n=y_1$$
$$u_{22}x_2+\dots+u_{2n}x_n=y_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$u_{nn}x_n=y_n$$

► Το σύστημα αυτό λύνεται με προς τα πίσω αντικαταστάσεις.

$$x_n=\frac{y_n}{u_{nn}}$$

Για $i=n-1,n-2,\dots 1$

$$x_i=\left(y_i-\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j\right)/u_{ii}$$

Πράξεις: $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{(n-1)n}{2}$ πολλαπλ. κ' προσθέσεις. Και n διαιρέσεις.

Συνολικά $\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα.

$$\begin{matrix} \frac{6}{9}=\frac{2}{3} \\ \frac{3}{9}=\frac{1}{3} \end{matrix} \quad \left.\begin{aligned} 9x_1+6x_2+3x_3&=0 \\ 6x_1+8x_2+4x_3&=6 \\ 3x_1+4x_2+3x_3&=2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \quad \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \left.\begin{aligned} 9x_1+6x_2+3x_3&=0 \\ 4x_2+2x_3&=6 \\ 2x_2+2x_3&=2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 9x_1+6x_2+3x_3&=0 \\ 4x_2+2x_3&=6 \\ x_3&=-1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1&=(0-6\cdot 2-3(-1))/9=-1 \\ x_2&=(6-2(-1))/4=2 \\ x_3&=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & A & & b \\ & 9 & 6 & 3 & 0 \\ \frac{2}{3} & 6 & 8 & 4 & 6 \\ \frac{1}{3} & 3 & 4 & 3 & 2 \\ \hline & & \underline{4} & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & & 2 & 2 & 2 \\ & & & \underline{1} & 1 \end{array}$$

Άρα $x^t=[-1\ 2\ -1]$.

$Ax=b$. Το συμβολίζω ως $A^{(1)}x=b^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{r-1\,r-1}^{(r-1)} & & \cdots & a_{r-1\,n}^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & 0 & \boxed{a_{rr}^{(r)}} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_{r-1}^{(r-1)} \\ b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)} \end{bmatrix}$$

$$m_{i1}=\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad , a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-m_{i1}a_{1j}^{(1)}$$

$$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-m_{i1}b_1^{(1)}$$

$r=n$ $\quad$ $A^{(n)}=U$ άνω τριγωνικός

Κόστος απαλοιφής του A: $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2=\frac{(n-1)n}{2}+$

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=O\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

- Απαλοιφή του b: $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\frac{(n-1)n}{2}=O\left(\frac{n^2}{2}\right)$

LU - Ανάλυση

$$A^{(2)} = M_1 A^{(1)} \quad , b^{(2)} = M_1 b^{(1)} \quad , A^{(3)} = M_2 A^{(2)}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ -m_{n1} & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & -m_{n2} & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}, \dots M_r = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{r+1\,r} & 1 & \\ & & -m_{nr} & & 1 \end{bmatrix}$$

Επαγωγικά.

$$U = A^{(n)} = M_{n-1} A^{(n-1)} = M_{n-1} M_{n-2} A^{n-2} = \dots = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1 A^{(1)} =$$

$$= \underbrace{M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1}_{M} A \iff A = M^{-1} U = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} U$$

Παρατηρώ ότι:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{γενικά } M_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{n-1r} & 1 & \\ & & m_{nr} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ m_{n1} & m_{n2} & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}, \text{επαγωγικά } M^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$Ax = b \iff L\underbrace{Ux}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/3 & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}} \overset{U}{\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & 0 \\ 2/3 & 1 & & 6 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 \end{array}$$

$y_1 = 0$

$y_2 = 6 - \frac{2}{3} \cdot 0 = 6$

$y_3 = 2 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 6 = -1$

$y^t = [10 \ 6 \ -1]$

$$\begin{array}{cccc} 9 & 6 & 3 & 0 \\ & 4 & 2 & 6 \\ & & 1 & -1 \end{array}$$

$x^t = [-1 \ 2 \ -1]$

<u>Εύρεση Ορίζουσας - Η απαλοιφή Gauss</u>

Δεν αλλάζει την ορίζουσα του πίνακα εκτός αν έχουμε r συνολικά αλλαγές γραμμών. Τότε πολλ/ζεται με $(-1)^r$.

$\det(A) = (-1)^r \det(U) = (-1)^r U_{11} U_{22} \dots U_{nn}$

<u>Εύρεση αντιστρόφων.</u>

$AX = I \Leftrightarrow X = A^{-1}$

Με LU-ανάλυση

Συνολ. κόστος $= O\left(\frac{4n^3}{3}\right)$

$AX = I = L\underbrace{UX}_{Y} = I \Leftrightarrow \begin{cases} LY = I \\ UX = Y \end{cases}$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & I & \\ & -1 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & \\ 2/3 & 1 & & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$y_{11} = 1$ $\quad y_{12} = 0$

$y_{21} = 0 - \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}$ $\quad y_{22} = 1$

$y_{31} = 0 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0$ $\quad y_{32} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

$$y^t = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Y$$

$$\begin{array}{cccccc} 9 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 4 & 2 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

$x_{11} = (1 - 6(-\frac{1}{6}) + 3 \cdot 0)/9 = 2/9$

$x_{21} = (-\frac{2}{3} - 2 \cdot 0)/4 = -\frac{1}{6}$

$x_{31} = 0$

$x_{12} = (0 - \frac{1}{2} \cdot 6 - (\frac{1}{3}) 3)/9 = -\frac{1}{6}$

$x_{22} = (1 - 2(-\frac{1}{2}))/4 = \frac{1}{2}$

$x_{32} = -\frac{1}{2}/1 = -\frac{1}{2}$

$x_{13} = (0 - 6(-1/2) - 3 \cdot 1)/9 = 0$

$x_{23} = (0 - 2 \cdot 1)/4 = -1/2$

$x_{33} = 1/1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2/9 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = X = A^{-1}$$

Έστω το γρ. σύστημα: $10^{-1} x_1 + x_2 = 1$.

$$x_1 + x_2 = 2$$

Να λυθεί με υπολογιστή με <u>αριθμούς μηχανής</u> $M = M(10, 3, -20, U=20)$

$$m_{21} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - m_{21} a_{12}^{(1)}, \quad a_{22}^{(2)} = fl(1 - 10^4 \cdot 1) = fl(-9999) = -10^4.$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - m_{21} b_1^{(1)}, \quad b_2^{(2)} = fl(2 - 10^4 \cdot 1) = fl(-9998) = -10^4.$$

Ακριβής λύση: $x_1 = \frac{10000}{9999} = 1.0001 \approx 1$

$$x_2 = \frac{9998}{9999} = 0.9998 \approx 1.$$